Title	Lie群に於ける半單純部分群芽の擴大について
Author(s)	東郷, 重明
Citation	全国紙上数学談話会. 2(13) p.463-p.468
Issue Date	1949-01-15
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75275
rights	
Note	

141. Lie群に於ける半單純部分群芽の擴大について

広島文理大　東郷重明 (1948.12.18)

序論

toroidal group の或る種の部分群芽の例が示す様に[1] Lie群Gの部分群芽H' は之を群芽とするGの部分群に一般には拡大されない。吉田氏は Gが linear group, H'が半單純のとき. 拡大が可能であることを示された[2]

ここでは任意の Lie 群 G に於ける半単純部分群芽 H' が如何なる條件の下に拡大が可能であるかを調べよう.

まず §1 に於て群芽の拡大に関する予備的性質を述べた後, §2 で H' の generate する代数的部分群の単位近傍に於ける構造を調べ, この結果を使って §3 に於て拡大可能な充分條件を述べる. そして §4 では拡大が不可能な例を上げる.

§1. Lie 群芽の拡大と単連結群の準同型写像.

G : Lie 群.

H' : G に於ける部分 Lie 群芽等(充分小さく与へられてゐるとする)

H : H' によつて生成された G の代数的部分群 即ち $\sum H'^{n}$

H^{α} : H の閉包即ち H を含む最小の Lie 部分群.

とすればよく知られてゐる様に.

補題1[3]. H' と局所同型な H^{*} から G 内への表現 $f: x^{*} \rightarrow f(x^{*}) = x$ は unique に拡張され, $f(H^{*}) = H$ である.

補題2.[4] 次の條件は互に同値である.

(1°) $H = H^{\alpha}$ 即ち H が Lie 群になる.

(2°) H' が H^{α} の単位近傍になる. 即ち H' が H^{α} の群芽.

(3°) H' が H の単位近傍になる.

(4°) f (補題1の) が準同型になる.

定義. 上の互に同値な條件の何れかが充されるとき, H' は G に於て自己を群芽とする Lie 群に拡大されると云ふ.

§2. 単位近傍に於ける H^{α} の構造

以下 H' は半単純とする.

補題3. G, H の核心を夫々 Z_G, Z_H とする. G の単位近傍 U を充分小さくとれば,

$$Z_H \cap U \subset Z_G$$

証明. G の正則表現 $x \rightarrow D(x)$ を考へると 容易に知られる様に. $x \in Z_G$ と $D(x) = E$ (単位行列) は同値である. 半単純群の連続表現の完全可約性から適

当な一次変換を施すと,

$$x \in H \to D(x) \sim \begin{pmatrix} D_1(x) & & 0 \\ & D_2(x) & \\ & & \ddots \\ 0 & & & D_n(x) \end{pmatrix}$$

ここで $x \to D_i(x)$. $x \in H$ は既約表現 従って $\det D_i(x) = 1$

今 $z \in Z_H$ に対しては $D_i(z)D_i(x) = D_i(x)D_i(z)$. $x \in H$ なる故.

Schur の補題から[5]

$$D(z) \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 E_1 & & 0 \\ & \alpha_2 E_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \alpha_n E_n \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \alpha_1^{d_1} = \alpha_2^{d_2} = \cdots \alpha_n^{d_n} \\ (d_i \text{ は } D_i(x) \text{ の次元}) \end{matrix}$$

故に U を充分小さくとれば $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots\cdots = \alpha_n = 1$.

従って $D(z) = E$. 故に $z \in Z_G$.

定理. H' が充分小さいとき U を適当にとる.

1) $U \cap H^\alpha = H' \times (Z_{H^\alpha} \cap U)$

2) $U \cap H = H' \times (Z_H \cap U)$

3) $Z_{H^\alpha} \cap U = Z_H^\alpha \cap U$.

証明. 1) H' は H^α の不変部分群芽であるから Cartan の定理[6]を使って容易に H' は H^α の群芽の直積因子である. 故に G の群芽 U を適当に小さくとれば $U \cap H^\alpha = H' \times Z$ と書ける. 従って Z は H' と可換 H^α の定義から Z は又 H^α と可換になる. 即ち $Z \subset Z_{H^\alpha}$. 故に

$$U \cap H^\alpha = H' \times (Z_{H^\alpha} \cap U)$$

2) $h \in U \cap H \subset U \cap H^\alpha = H' \times (Z_{H^\alpha} \cap U)$ とすれば $h = h'z$, $h' \in H'$, $z \in Z_{H^\alpha} \cap U$ なる形に表はされる. 従って $z = h'^{-1} h \in H$ とかゝれ, $z \in Z_H$ となる. これから容易に $U \cap H = H' \times (Z_H \cap U)$

3) U を適当にとれば 1), 2) から明らかである.

§3. $H^\alpha = H$ なるための充分條件.

§2の定理を使へば次の場合に H' は自己を群芽とする Lie 群に拡大可能である.

D. Z_G が discrete のとき.

Uを充分小さくとれば $Z_H \cap U = \{e\}$ (eはGの単位元), 従つて $H \cap U = H'$, 故に§1 補題2.(3°) を使へばよい.

例(α) Gが半単純

1) $Z_H(Z_{H^*})$ の order 有限のとき,

$Z_H \cap U = \{e\}$ たる故上と同様.

例.(β) H' が複素半単純のとき:

何者. H^* に unitary 制限を行つて得られる compact real form を H^*_u とすれば, Cartan の定理[7] から $Z_{H^*} = Z_{H^*_u}$. 然るに $Z_{H^*_u}$ が有限になるから.

(γ) H^* を部分 Lie 群とする複素 Lie 群Kが存在するとき (特に H^* が完閉のとき):

何者. H^* のKに於ける complexing を H^*_c とすれば, H^*_c は複素半単純である。H^*_cの核心は有限だから $Z_H{}^*$ も有限になる.

(δ) Gが複素 Lie 群のとき:

何者 H'のGに於ける complexing を H'_c とすれば, H'_c は半単純なる故(β) から拡大可能である. 故に (α)によつて H' も拡大可能である.

さて今 $H^\alpha \neq H$ とする. Ado-Cartan の定理[8] によればGの群芽Uと局所同型な linear transformation による表現が存在する. それを $x \in U \to D(x)$ とする. $z \in Z_H \cap U$ なるzに対して先づUの中でeから $z\ (\neq e)$ に, 次いでH内でzからeに至る道lを考へて, lに沿ふて同型表現 $x \to D(x)$ を拡大するとその終点eに於て $D(z)$ ($\neq$ 単位行列) が得られる. 従つてzが異なればこれらの道lは互に同位でない. そして単位近傍に於ては Z_H は Z_{H^α} の中で dense であるから, 結局Gの基本群で位数の如何程でも大きいものが存在する.

H^α について云へは, H^* の核心で位数が如何程でも大きいものが存在する. 又Gに局所同型な連続表現が存在するときは上の結果から $H^\alpha = H$ である. 故に

3) Gの基本群が有限のとき.

例 (ε) Gが単連結

4) Gが完閉のとき.

(この場合は完全可分な位相群Gの場合に容易に拡張することが出来る。)

尚條件 1), 2), 3), 4) は交換子群 $G^{(1)}$, $G^{(2)}$, ……或は一般に H' を含む任意の *Lie* 部分群、又は G を部分群とする任意の *Lie* 群について充されゝばよい。

§4. $H^{\alpha} \neq H$ なる例.

基本群が *free cyclic group* $\{mc\}$ (*m integer*) を含む様な半單純群を考へる。(例へば、実変数の *homographic transformation* $x' = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$ の全体が作る群は *torus* の内部と同相だからその條件を充す) その *universal covering group* を g^{*} とすれば、$\{mc\}$ はその核心に含まれる。$R = (-\infty, +\infty)$ として $g^{*} \times R$ を作ると *Lie* 群である。τ を無理数として $(mc, m\tau - n)$ の全体を D とすれば、D は核心に含まれる *discrete* は *Abel* 群である。

今 *Lie* 群 G としての $G = g^{*} \times R/D$ を考へる。g^{*} の群芽を $g^{*'}$ とし、$g^{*} \times \{0\}/D = H'$ とすれば之は半單純な部分 *Lie* 群芽である。H' から生成される群は $H = g^{*} \times \{0\}/D$ である。H^{α} を作ると *Kronecker* の定理[9]から $(mc, 0)/D = (0, -m\tau + n)/D$ は m, n を適当にえらぶと R の単位近傍を稠密に蔽ふ 故に

$$H^{\alpha} = (g^{*} \times \{0\}/D)^{\alpha} = g^{*} \times R/D = G.$$

参考文献

(1) 例へば Pontrjagin: Topological groups. 264

(2) K. Yoshida: A theorem concerning the semi-simple Lie group, Tôhoku Math J. ; 44 (1937)

(3) 例へば Pontrjagin: 前掲. 228. 定理 63.

(4) 同上. 65. 定理 13.

(5) この証明法は吉田: 前掲による。

(6) L. Cartan: Thèse. 53

(7) E. Cartan: La géométrie des groupes simples. Annali di Math 4 (1927) 特に 250–251. F. Gantmacher: On the classification of real simple Lie groups. Recueil Math. 47 (1939) §4.

(8) E. Cartan: Les representations lineacres des groups de Lie, Journal de Math., 17 (1938) 1-12.

(9) 例へば Pontrjagin：前揭 150.